PÚBLICO

DOCUMENTO DEL BANCO INTERAMERICANO DE DESARROLLO

REGIONAL

TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

TC0112103

REPORTE DE CONSULTORÍA

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie: Matemática

Módulo: Teorema de Thales

Propuesta didáctica (Clases para el alumno)

Luis Belcredi Reyes
Mónica Zambra Marquisá

Plan de la secuencia didáctica: El teorema de Thales.

		Primera clase		
La isla misteriosa.	Actividad introductoria para movilizar conocimientos sobre el tema.	Los alumnos ya han completado la ficha: *La isla misteriosa* y el maestro solicita la intervención de los alumnos para su corrección.	Ficha *La isla misteriosa* y pizarrón.	15
Propiedades de las proporciones.	Animación.	Luego de ver la animación el maestro con la intervención de los alumnos resuelve el problema propuesto.	Video, pizarrón y calculadoras.	10
Thales en Egipto.	Perspectiva histórica: Thales y su leyenda.	Exposición por parte del maestro. Finalmente intervención de los alumnos.	Retroproyector, pizarrón y calculadoras.	15
Teorema de Thales en un triángulo rectángulo.	Enunciar y demostrar el teorema de Thales en un caso particular.	El maestro solicita la intervención de los alumnos desde el banco. Otra opción es dividir la clase en grupos pequeños para realizar el trabajo y luego se elabora el resumen.	Pizarrón.	10
Ejercicios de aplicación			Pizarrón.	
		Segunda clase		
Teorema de Thales demostrado por Euclides	Animación.	El maestro se asegurará de la comprensión de la demostración efectuando algunas preguntas.	Video.	10
Configuración de Thales en un triángulo.	Enunciar, comprender y aplicar.	Luego de analizar el enunciado y completar la demostración, el maestro propone a los alumnos la realización de dos ejercicios que implican el uso de la propiedad.	Retroproyector o video, pizarrón.	15
División de un segmento en partes iguales.	Animación.	Luego de ver la animación, el maestro con la intervención de los alumnos, efectúan los comentarios pertinentes y resuelven el desafío propuesto	Video y reproducción de la figura para cada alumno.	10
La cuarta proporcional	Animación.	Luego de ver la animación el maestro con la intervención de los alumnos resuelve el problema propuesto.	Video y reproducción de la figura para cada alumno.	10
Banco de ejercicios y problemas de aplicación	Utilizar y profundizar los resultados del Teorema de Thales.	El maestro tiene a su disposición una batería de ejercicios y problemas en formato atractivo que puede utilizar según las inquietudes del grupo.	Pizarrón o retroproyector	

Teorema de Thales

Propuesta didáctica

Primera clase

Actividad 1: *La isla misteriosa.*

A partir del fragmento de "La isla Misteriosa" de Julio Verne, en el cual un ingeniero mide la altura de una muralla con una vara y su "radio visual" y presuponiendo la proporcionalidad entre las longitudes, se plantea una "configuración" de Thales en los triángulos rectángulos así formados.
El ingeniero *Ciro Smith* da la información necesaria para resolver la situación y *Harbert* trata de interpretarla.

Objetivos:

- Identificar y representar datos.
- Revisar los métodos que permiten el cálculo del lado de un triángulo rectángulo "semejante" a otro triángulo de dimensiones conocidas.
- Movilizar los cálculos con proporciones.

Tarea previa para los alumnos:

Leer y completar la ficha: La isla misteriosa.

Desarrollo de la actividad:

- El maestro recuerda brevemente el fragmento (dando una breve noticia sobre Julio Verne y la época de la realización de la obra) y realiza el esquema a completar en el pizarrón.

- Solicita la intervención de los alumnos para completar el esquema.

- El maestro interroga a los alumnos sobre el resto de la actividad.

- De acuerdo a las respuestas recibidas se podrá profundizar en:

a) interpretación de "sólo tendremos que efectuar un cálculo de proporción",

b) regla de tres,

c) semejanza de triángulos,

d) propiedades de las proporciones,

e) unidades de medida,

f) lenguaje matemático (notación y vocabulario).

Actividad 2: Propiedades de las proporciones - Animación.

Objetivos:

- Revisión de las propiedades de las proporciones.

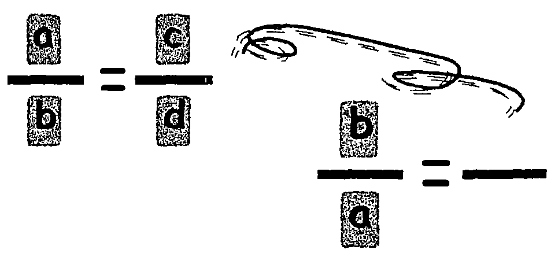
Desarrollo de la clase:

Luego de ver la animación, el maestro se asegura de que los alumnos asimilen las propiedades resolviendo con ellos el ejercicio: *Verdadero o falso?* tratando de erradicar los errores más frecuentes.

Además de permanecer en la pantalla las proposiciones a clasificar se entregarán impresas a los alumnos.

Propiedades de las proporciones

Como un juego de cartas. En cada carta figuran letras *a, b, c* y *d* o sumas de ellas que representan números y se intercambian de posiciones, accesibles sólo si la proporción es verdadera.



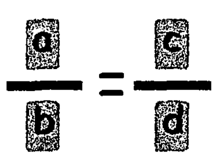
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *si y sólo si* $a \times d = b \times c$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ... etc.

Los alumnos tendrán que decidir si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. (En la idea de un juego de cartas, *si las cartas son buenas o malas*.)

Finalmente, las proposiciones falsas desaparecen y solo quedarán en la pantalla las verdaderas.

¿Verdadero o falso?

Si  se cumple que: $\boxed{}$

$\boxed{\frac{a+1}{b} = \frac{c+1}{d}}$ $\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$

$\boxed{\frac{a+5}{c+5} = \frac{b}{d}}$ $\boxed{\frac{a}{b+5} = \frac{c}{d+5}}$

$\boxed{\frac{a+5b}{b} = \frac{c+5d}{d}}$

En caso de que se estime conveniente, las igualdades que se trata de investigar si son verdaderas o falsas pueden ser numéricas.

Por ejemplo, de la igualdad $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ¿se deduce que $\frac{4}{5} = \frac{7}{10}$?

Actividad 3: Thales en Egipto.

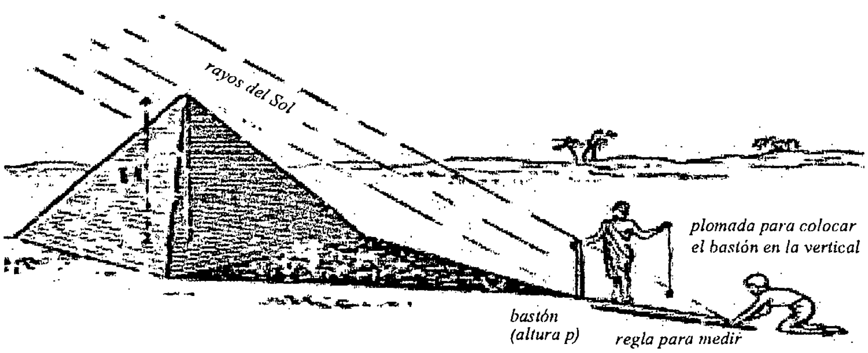
La altura de la gran pirámide de Giza.

Objetivo:

- Reubicar el Teorema de Thales en su contexto histórico.
- Reproducir o simular - en situación didáctica- la emoción asociada al descubrimiento del Teorema de Thales posiblemente pondrá al alumno en una posición crítica que le permitirá conocerlo, comprenderlo, aplicarlo y utilizarlo.

Desarrollo de la actividad:

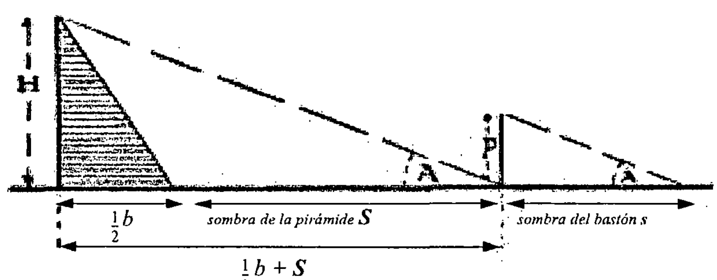
- Se presenta nuevamente una situación de cálculo de distancias indirectas. El maestro explica los dibujos que muestran, según la leyenda, como Thales de Mileto midió la altura de la gran pirámide de Giza. El maestro observa que en la segunda figura, los rayos del Sol se conciben *localmente* como rayos paralelos.



- El maestro explica que Thales utilizó la propiedad: "*Las sombras de los objetos verticales tienen longitudes* ***proporcionales*** *a las alturas de esos objetos*".

- El maestro propone interpretar los dibujos y obtener la altura de la pirámide con los siguientes datos:

  $b = 233$ m; $p = 1$ m;
  $S = 67{,}5$ m; $s = 1{,}26$ m



(obtenidos cuando los rayos del sol son perpendiculares a un lado de la base de la pirámide).

Actividad 4: Teorema de Thales en un triángulo rectángulo.

Objetivo:

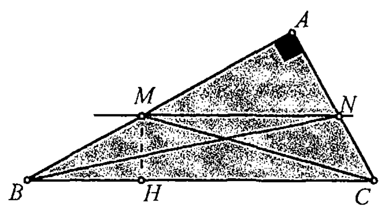
- Encontrar una justificación simple de la propiedad de Thales en un caso particular, que es justamente el que se utiliza en las actividades 1 y 3.

Desarrollo de la actividad: (*)

- El maestro indica los datos del siguiente problema:

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Una recta (r) paralela al lado $[BC]$ corta al lado $[BC]$ en M y al lado $[AC]$ en N.

- Se realiza en el pizarrón un esquema, se anotan los datos simbólicamente:



$\angle BAC = 90°$

$(r) \,//\, (BC)$

$(r) \cap (AB) = \{M\}$

$(r) \cap (AC) = \{N\}$

- Se interroga a los alumnos:

a) ¿Los triángulos BMN y CMN tienen áreas iguales?

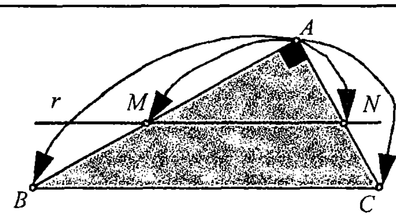
b) ¿El área del triángulo ABN es igual al área del triángulo ACM?

c) ¿Se deduce que $AN \times AB = AM \times AC$?

- El maestro resume los resultados completando junto a sus alumnos en el pizarrón la frase:

Si en un triángulo ABC, rectángulo en A, una recta (r) paralela al lado $[BC]$ corta al lado $[BC]$ en M y al lado $[AC]$ en N entonces:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\dots}{\dots}.$$



- El maestro propone un ejemplo numérico de aplicación de la propiedad demostrada.

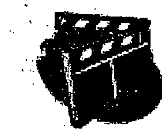
- Esta actividad puede ser desarrollada en forma grupal y en ese caso el enunciado recibe otra redacción.

Teorema de Thales

Propuesta didáctica

Segunda clase

Actividad 1: Euclides demuestra de la propiedad de Thales - Animación.



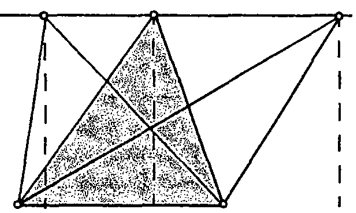
Objetivo:

- Demostrar el Teorema de Thales.

Desarrollo de la animación:

Leonstein, vestido de griego del siglo III antes de Cristo, les explica a Diego y Paula la demostración del Teorema de Thales tal como ha sido escrita por Euclides hace más de 23 siglos.

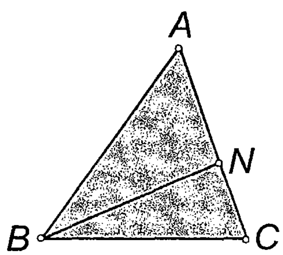
Leonstein - La idea en que Euclides basa su demostración de la propiedad de Thales (*Proposición 2 del libro VI Elementos*) es muy sencilla.

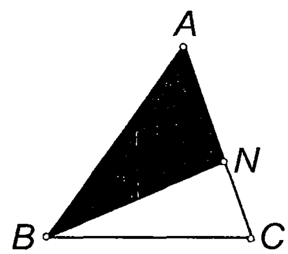


-Reposa en las dos siguientes propiedades:

1) Dos triángulos de la misma base e igual altura tienen igual área.

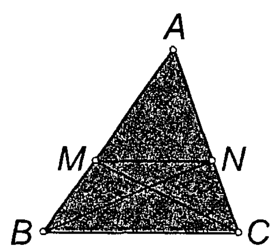
2) Si en un triángulo ABC elijo un punto N interior a uno de los lados, por ejemplo $[AC]$, las áreas de los triángulos que el segmento $[BN]$ determina son proporcionales a los segmentos que N determina sobre $[AC]$.



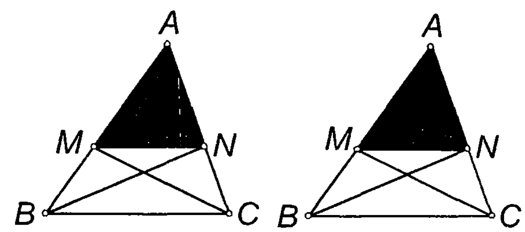


$$= \frac{AN}{NC}$$

Leonstein -La figura de Thales está formada por un triángulo ABC y una paralela (MN) al lado [BC] del triángulo.

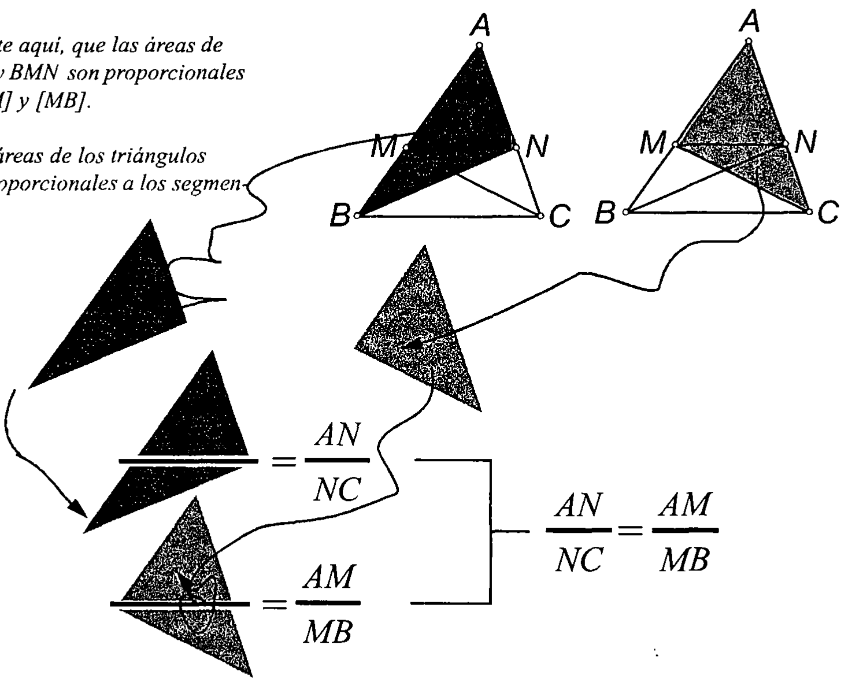


Leonstein - Los triángulos ABN y ACM que se forman, tienen áreas iguales.



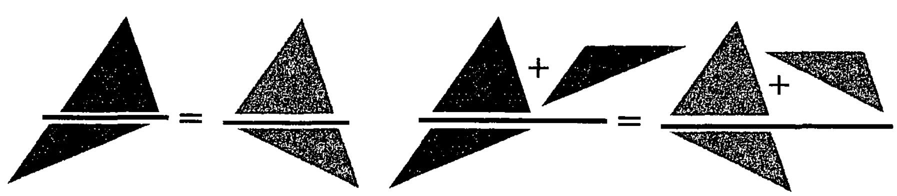
Leonstein - Pero, hete aquí, que las áreas de los triángulos AMN y BMN son proporcionales a los segmentos [AM] y [MB].

Análogamente, las áreas de los triángulos AMN y CMN son proporcionales a los segmentos [AN] y [NC].



Diego - Pero , si hay proporcionalidad ¿puedo llegar a que las áreas de los triángulos ABN y ACM son iguales?

Leonstein - ¡Claro! Observen: a los numeradores les sumamos los denominadores.



Leonstein - Si los numeradores son iguales los denominadores también deben serlo, luego, los triángulos *BMN* y *CNM* tienen la misma área y comparten la misma base [*MN*], en consecuencia sus alturas son iguales.

En conclusión la recta (*MN*) es paralela al lado [*BC*].

Esto es justamente lo que dice el teorema recíproco de Thales.

Paula - ¡Ya entendí!, Leonstein. Si hay paralelismo hay proporcionalidad y, recíprocamente, si hay proporcionalidad hay paralelismo.

Actividad 2: *Configuración de Thales en un triángulo.*

Objetivos:

- Enunciar, comprender y demostrar la configuración de Thales en un triángulo.
- Aplicar el teorema de Thales y su recíproco.

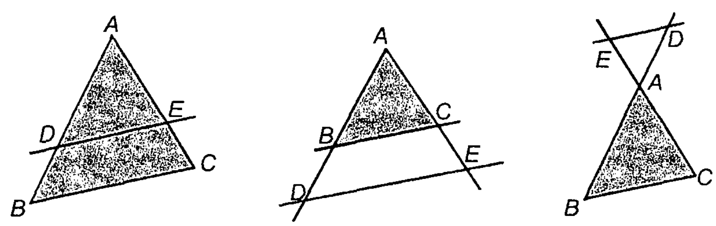
Desarrollo de la actividad:

Luego de analizar el enunciado y efectuar la demostración, el maestro propone a los alumnos dos ejercicios como aplicaciones de la propiedad.

- Presentación de las hipótesis:

Sea un triángulo ABC.
Se considera un punto D de (AB) y un punto E de (AC) tales que los puntos A, B y D están en el ***mismo orden*** que los puntos A, C y E.

Se tiene entonces los tres casos de las siguientes figuras.



- Enunciado:

Configuración de Thales en un triángulo:

"Si dos triángulos ABC y ADE son tales que $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ y las rectas (BC) y (DE) son paralelas, entonces:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Dicho de otro modo:

Se tiene la siguiente tabla de proporcionalidad:

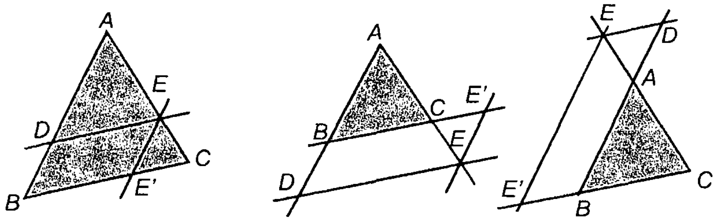
AD	AE	DE
AB	AC	BC

- Demostración:

La primera igualdad, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ está demostrada por Euclides en la animación de Leonstein.

Para demostrar la segunda igualdad, $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

trazamos por E la paralela a la recta (AB) que corta en el punto E' a la recta (BC):



Tenemos así, aplicando el teorema de Thales en el triángulo ABC (dado que las rectas (AB) y (EE') son paralelas) que $\frac{CE}{AC} = \frac{CE'}{CB}$ y en consecuencia, aplicando una propiedad de las proporciones y observando que $BDEE'$ es un paralelogramo, se tiene para el primer caso:

$$\frac{AC-CE}{AC} = \frac{CB-CE'}{CB}, \text{ luego } \frac{AE}{AC} = \frac{BE'}{CB} = \frac{DE}{BC}$$

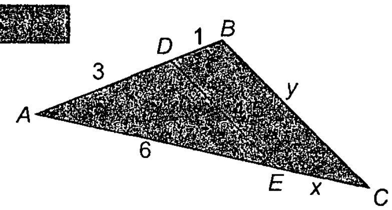
Los otros dos casos se prueban de manera muy similar.

Ejercicios

Ejercicio 1 - *Aplicación del teorema de Thales en el cálculo de longitudes*

En la figura, las rectas (DE) y (BC) son paralelas.

Calcula EC y BC.



Resolución:

Como las rectas (DE) y (BC) son paralelas, aplicando la propiedad de Thales al triángulo ABC se tiene:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Sustituyendo por los valores indicados en la figura, la igualdad $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$ nos permite afirmar:

Actividad 3: División de un segmento en partes iguales - Animación .

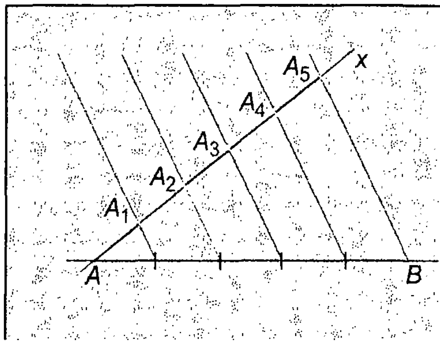
Objetivo:

- Dividir un segmento en partes iguales.

Desarrollo de la actividad:

- Luego de ver la animación, el maestro con la intervención de los alumnos, efectúan los comentarios pertinentes y resuelven el desafío propuesto.

División de un segmento en partes iguales.



1. Trazo una semirrecta cualquiera de origen A; $[Ax)$.
2. Ubico sobre $[Ax)$ cinco segmentos consecutivos iguales:
   $[AA_1]$, $[A_1A_2]$ ... $[A_4A_5]$.
3. Trazo la recta (A_5B) y sus paralelas por A_1, A_2 ... A_4 que cortan a $[AB]$ en los puntos buscados.

Para proponer el siguiente desafío se debe conocer la propiedad del baricentro de un triángulo. En caso de no ser así se cambiará por otra conveniente. Las ayudas, si se decide incluirlas están dadas por los personajes animados. La solución, si se decide incluirla está sugerida por los puntos rojos.

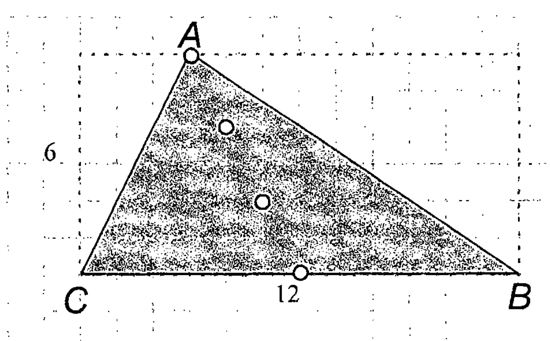
Desafío:

Ubica con precisión el baricentro del triángulo ABC sin efectuar ningún trazado.

-Leonstein enmarca el triángulo en un rectángulo de 6 por 12. (Desaparece el rectángulo pero quedan los números).

- Diego y Paula recuerdan que el baricentro de un triángulo se encuentra sobre la mediana y a los dos tercios de la misma a partir del vértice.

Finalmente se agregan los puntos rojos.



Actividad 4: Cálculo y construcción de la cuarta proporcional - Animación.

Objetivo:

- Calcular y construir la cuarta proporcional. Analizar y completar un programa de construcción.

Desarrollo de la actividad:

- Luego de ver la animación, el maestro con la intervención de los alumnos, efectúan los comentarios pertinentes y completan el programa de construcción.

La cuarta proporcional.

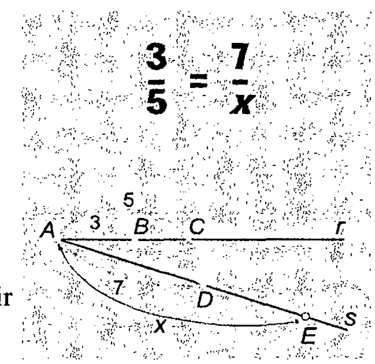
A/ Cálculo

Encuentra el número **x** tal que: $\frac{3}{5} = \frac{7}{x}$.

x es la cuarta proporcional de la terna de números: 3, 5 y 7.

B/ Construcción.

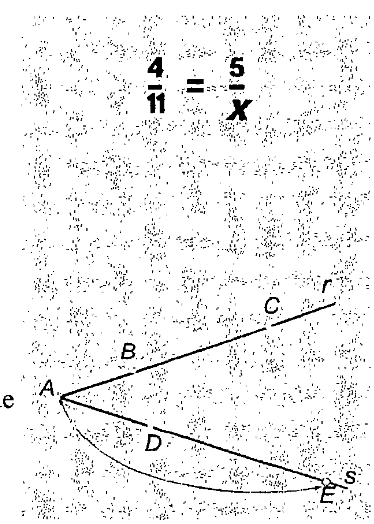
Dados tres segmentos de longitudes 3, 5 y 7, es posible construir un cuarto segmento de longitud x que verifique:



$$\frac{3}{5} = \frac{7}{x}.$$

Completa el programa de construcción de la cuarta proporcional.

Dados tres segmentos de longitudes 4, 11 y 5, es posible construir un cuarto segmento de longitud x que verifique:



■ Construyo sobre la semirrecta $[Ar)$, dos segmentos $[AB]$ y $[BC]$ tales que:

$AB = \ldots$ cm, $BC = \ldots$ cm.

■ Trazo otra semirrecta $[As)$ y ubico sobre dicha semirrecta el punto D tal que: $AD = \ldots$ cm.

■ Trazo la … a (BD) que pasa por …. Ella corta a … en E.

■ Aplicando el Teorema de Thales se tiene que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ y que por lo tanto $AE = \ldots$ *cm*.

Banco de problemas.

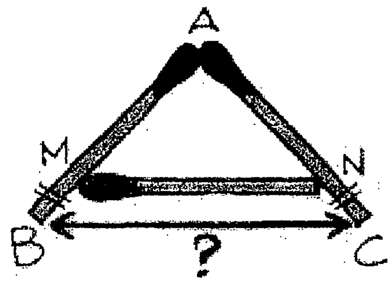
- El maestro tiene a su disposición una batería de ejercicios y problemas en formato atractivo que puede utilizar según las inquietudes del grupo.

1 ¿Rectas paralelas o no?

Se considera la siguiente figura con: $AM = 3 \times MB$.

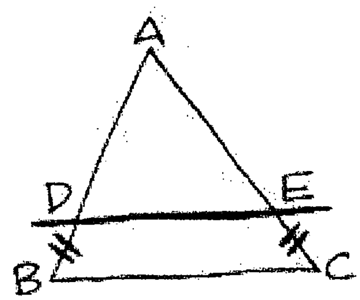
a) ¿(MN) y (BC) son paralelas?

b) Siendo la unidad de medida la cerilla, calcula BC.



2 Apariencias.

Sea un triángulo ABC. Sea D un punto del segmento $[AB]$ y E un punto del segmento $[AC]$ tal que $BD = CE$.



a) ¿Puedes afirmar que las rectas (BC) y (DE) son paralelas?

b) Construye un triángulo ABC tal que: $AB = 3$, $BC = 7$ y $AC = 8$.

Ubica un punto D sobre $[AB]$ tal que $BD = 2$ y E sobre $[AC]$ tal que $EC = 2$. Traza (ED).

Compara los cocientes: $\frac{AD}{AB}$ y $\frac{AE}{AC}$. Concluye.

3 Indiana Jones.

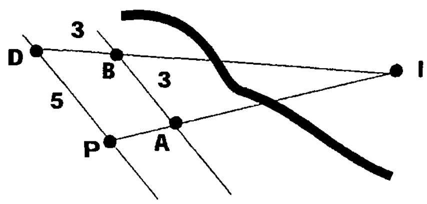
Para calcular la distancia entre el depósito D y la Iglesia I separadas por un peligroso río, Indiana Jones utiliza una palmera P cercana al depósito y del mismo lado del río, y ubica dos estacas A y B alineadas respectivamente con P e I y D e I; de manera que las rectas (AB) y (DP) sean paralelas.

A continuación mide las distancias y anota:

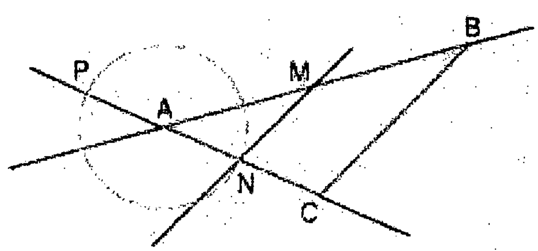
$AB = 3\text{m}$, $DB = 3\text{m}$ y $DP = 5\text{m}$.

Con esos datos el profesor Jones dice que la distancia DI es …

¿Puedes tú decir cuál es esa distancia y cómo hizo el cálculo?



4 Un contraejemplo.



Sea un triángulo ABC, y una recta (MN) paralela a (BC).

La circunferencia de centro A que pasa por N recorta a (AC) en P.

a) Prueba que: $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$.

b) Diego ingenuamente pretende que: "Si ABC es un triángulo y si una recta r corta a la recta (AB) en X y a la recta (AC) en Y de manera que $\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}$ entonces r es paralela a (BC)."

¿Es verdad? Justifica la respuesta.

Ficha para el alumno

La isla misteriosa.

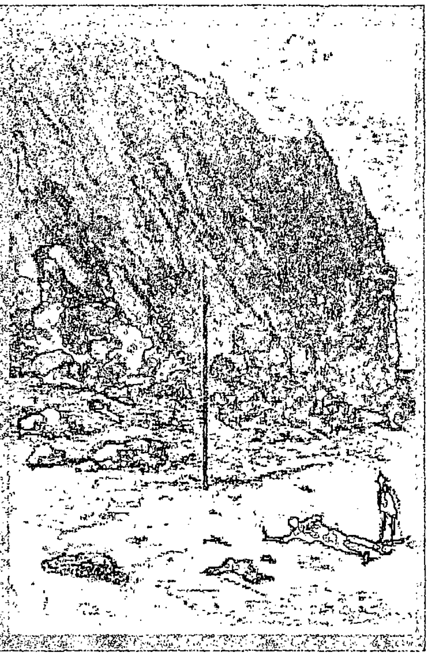
Fragmento de "La isla Misteriosa" de Julio Verne.

"... Pues bien hijo mío, acabo de construir dos triángulos rectángulos semejantes: el primero, más pequeño, tiene como catetos la vara perpendicular y la distancia que separa la estaca del pie de la vara, mi radio visual es su hipotenusa; el segundo tiene como catetos la muralla perpendicular cuya altura tratamos de obtener, y la distancia que separa la estaca del pie de la vara, mi radio visual constituye asimismo su hipotenusa, no siendo otra cosa que la prolongación de la del primer triángulo.

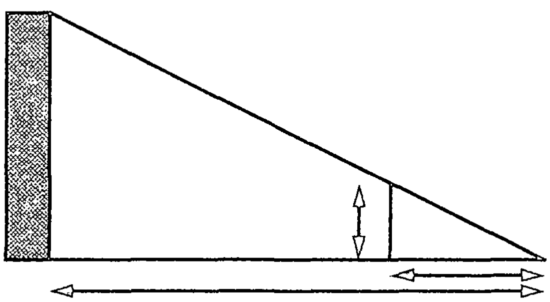
- ¡Oh!, señor Ciro, he comprendido - exclamó Harbert -. Así como la distancia de la estaca a la vara es proporcional a la distancia de la estaca a la base de la muralla, la altura de la vara lo será a la de la muralla.
- Eso mismo, Harbert - respondió el ingeniero -, y cuando hallamos medido las primeras distancias, conociendo la altura de la vara, sólo tendremos que efectuar un cálculo de proporción para obtener la altura de la muralla, evitando así el trabajo de medirla directamente.

Tomaron las dos distancias horizontales empleando la misma vara, cuya longitud sobre la arena era exactamente de diez pies. La primera distancia entre la estaca y el punto en que la vara estaba enterrada, fue de quince pies.

La segunda, entre la estaca y la base de la muralla, fue de quinientos pies. Terminadas estas mediciones, Ciro Smith y Harbert regresaron a las chimeneas.



1. Coloca las distancias obtenidas por Ciro Smith y Harbert en el siguiente esquema:



¿Puedes con estos datos calcular la altura de la muralla?

....

....

....

Una vez allí, el ingeniero tomó una piedra lisa traída en una de sus excursiones precedentes, especie de esquisto de pizarra, sobre la cual era fácil trazar cifras mediante un agudo guijarro, y estableció la siguiente proporción:

15 : 500 : : 10 : x

500 × 10 = 5 000

$$\frac{5000}{15} = 333,33$$

Así quedó establecido que la muralla de granito medía trescientos treinta y tres pies de altura."

2.. Redacta con notación más moderna y justifica los cálculos realizados por el ingeniero Ciro Smith.

....

3. ¿Cuál es la altura de la muralla en metros (un pie equivale aproximadamente a 30 cm)? ....

....